

文章编号: 1000-7598-(2007) 05-0871-07

一种基于热力学原理的密砂模型

秦理曼, 迟世春, 林 皋

(大连理工大学 土木水利学院及海岸与近海工程国家重点实验室, 大连 116024)

摘 要: 从热力学定律出发, 利用自由能函数和耗散函数, 通过严格的理论推导得到屈服函数、流动法则和硬化规律。在临界状态模型的框架内, 将基于热力学基础的各向异性模型和特定的旋转硬化规律结合起来, 提出了一种新的处理方法用来模拟密砂在三轴试验中的变形曲线。给定多组模型参数, 计算排水和不排水三轴试验, 并简单讨论了模型参数对曲线规律的影响, 结果表明这种方法是有效的。通过屈服面在变形不同阶段采用不同的旋转方向, 能够考虑密砂的复杂试验曲线特征, 又由模型的热力学基础保证了屈服面和剪胀函数的协调。这种方法确定的模型结构严密, 适应性强, 可以描述大范围土体的特性, 且简单易于使用。

关 键 词: 密砂; 热力学; 弹塑性模型; 三轴试验

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

A dense sand model based on thermomechanics principle

QIN Li-man, CHI Shi-chun, LIN Gao

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, School of Civil and Hydraulic Engineering,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Starting with the first and second laws of thermodynamics, the free energy function and dissipation potential function are discussed; then the corresponding yield loci, flow rules as well as hardening rules are deduced in a systematic manner. Within the framework of critical state soil mechanics, a new method that combines the anisotropic model based on thermodynamics and specific rotation hardening rule is presented for dense sand. Then triaxial drained and undrained test curves are simulated with given model parameters; and the influence of model parameters on curve shape is discussed briefly. The results prove the validity of this method, which covers the perplexing triaxial test curve in dense sand by adopting variational rotation directions, as well as guarantees the consistence of dilatancy function with yield locus because of the thermodynamics basis involved. The models constructed through this method have the advantages of the strict structure, the extensive applicability and the simpleness.

Key words: dense sand; thermomechanics; elastoplastic model; triaxial test

1 前 言

由 Schofield 和 Roscoe 等提出的临界状态模型在过去几十年中得到了广泛的发展。构建岩土材料弹塑性模型的传统方法可以确定弹性规律、屈服条件、塑性势以及各向同性和随动硬化规律, 所有的方程之间相互独立。为了符合观测数据, 大多数情况下的模型是采用非关联流动法则, 这些模型中不包含热力学定律提出的限制, 但经常也会用到一些“稳定性假定”, 诸如 Drucker 公设。近 20 年来, 热力学理论有了很大的发展, 广泛应用于使用关联流动

法则的金属材料力学问题中^[1,2]。Collins 和 Houlsby (1997 年) 的工作, 将非关联流动法则引入热力学理论, 为热力学理论在岩土本构中的应用奠定了基础^[3]。

热力学方法主要优势之一在于它提供了一种相对严密的数学结构, 除去了常规方法中的许多任意性, 整个本构关系只从 2 个热力学势函数中确定。从这种一般方法出发可以发展许多新的临界状态本构模型^[4,5]。

材料受剪切荷载作用时排水试验中松砂体缩, 密砂剪胀; 不排水试验中松砂的应力路径以平滑的

曲线趋向于临界状态, 密砂的应力路径有明显的转折, $p'-q$ 平面上应力经常以接近常数 $\eta = M$ 的路径逐渐趋于最终状态。密砂典型的试验曲线如图 1 所示, 到达最终状态后应力和塑性体积应变停止变化, 因为应力不变, 弹性体积应变也不变, 临界状态定义为 $dp' = dq = d\varepsilon_v = 0$, 而 $d\varepsilon_s \neq 0$ 。由于密砂的三轴试验曲线比松砂更复杂, 现有的许多本构模型不能很好地模拟的这些特性。

本文介绍了以热力学理论为基础构建本构模型的一般方法, 给出了具体实例——各向异性模型, 通过分析定性, 说明这种模型配合适当地旋转硬化规律, 能够模拟密砂的复杂变形曲线, 最后给出模型参数, 计算了较大参数变化范围内密砂的排水和不排水剪切特性, 验证了这种方法的有效性。

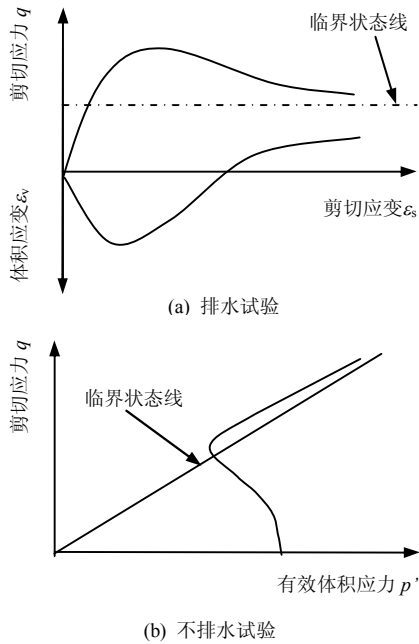


图 1 密砂典型的三轴试验曲线
Fig.1 Triaxial test curves for dense sand

2 基于热力学理论建立弹塑性本构关系的一般过程

根据热力学基本理论, 在等温变形条件下每单位体积上应力所作的增量功应等于自由能函数的增量与耗散函数增量之和, 耗散函数的增量始终非负^[4, 5]。用公式表达为: $\sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} = d\psi + d\phi$ 和 $d\phi \geq 0$, 其中 ψ 为自由能函数; ϕ 为耗散函数; $d\varepsilon_{ij}$ 为应变增量; σ'_{ij} 为有效应力, 这两个公式分别为等温变形条件下的热力学第一定律和第二定律, 若土体产生塑性变形, 则 $d\phi > 0$; 若只有弹性变形, 则 $d\phi = 0$ 。

自由能是独立状态变量的函数。独立状态变量

可以选取总应变和塑性应变, 即 ε_{ij} 和 ε_{ij}^p 。因此, 在一般应力条件下自由能函数的增量为^[4, 5]

$$d\psi = (\partial\psi/\partial\varepsilon_{ij})d\varepsilon_{ij} + (\partial\psi/\partial\varepsilon_{ij}^p)d\varepsilon_{ij}^p \quad (1)$$

耗散函数不完全是独立状态变量的函数, 它不仅依赖于塑性应变, 而且还依赖于塑性应变增量。耗散增量函数的形式可以写成: $d\phi = d\phi(\varepsilon_{ij}^p, d\varepsilon_{ij}^p)$ 。对于率无关弹塑性材料, $d\phi$ 是塑性应变增量的一阶齐次函数^[6]。根据欧拉方程, $d\phi = [\partial(d\phi)/\partial(d\varepsilon_{ij}^p)]d\varepsilon_{ij}^p$, 因此

$$\sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} = (\partial\psi/\partial\varepsilon_{ij})d\varepsilon_{ij} + \{(\partial\psi/\partial\varepsilon_{ij}^p) + [\partial(d\phi)/\partial(d\varepsilon_{ij}^p)]\}d\varepsilon_{ij}^p \quad (2)$$

可以推出,

$$\pi'_{ij} = -\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}^p} = \frac{\partial(d\phi)}{\partial(d\varepsilon_{ij}^p)}; \quad \sigma'_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad (3)$$

从 π'_{ij} 的表达式中消去 $d\varepsilon_{ij}^p$, 可以得到 $f(\pi'_{ij}) = 0$, 即为耗散应力空间中的屈服条件, 同时还可以得到正交的流动法则^[1]。

对于解耦材料, 自由能 ψ 是 2 个函数的和, 一个只依赖于弹性应变, 另一个只依赖于塑性应变, 即 $\psi = \psi_1(\varepsilon_{ij}^e) + \psi_2(\varepsilon_{ij}^p)$ 。此时, 有效应力所做的功可分为弹性和塑性部分, 分别表达为

$$dw^e = \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}^e = d\psi_1 = [\partial\psi_1(\varepsilon_{ij}^e)/\partial\varepsilon_{ij}^e]d\varepsilon_{ij}^e \quad (4)$$

$$dw^p = \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\psi_2 + d\phi = [\partial\psi_2(\varepsilon_{ij}^p)/\partial\varepsilon_{ij}^p]d\varepsilon_{ij}^p + [\partial(d\phi)/\partial(d\varepsilon_{ij}^p)]d\varepsilon_{ij}^p \quad (5)$$

于是

$$\sigma'_{ij} = [\partial\psi_2(\varepsilon_{ij}^p)/\partial\varepsilon_{ij}^p] + \partial(d\phi)/\partial(d\varepsilon_{ij}^p) = \rho'_{ij} + \pi'_{ij} \quad (6)$$

即为塑性本构关系, 其中 $\pi'_{ij} = \partial(d\phi)/\partial(d\varepsilon_{ij}^p)$ 和 $\rho'_{ij} = \partial\psi_2(\varepsilon_{ij}^p)/\partial\varepsilon_{ij}^p$ 分别称耗散应力和转移应力, 这样就可以区分材料变形中的塑性功和耗散功。将 π'_{ij} 代入 $d\phi$ 的表达式中, 得到耗散功增量为 $d\phi = \pi'_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$, 而塑性功增量为 $dw^p = \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$, 二者之差是转移功增量 $dw^t = dw^p - d\phi = \rho'_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ 。热力学第二定律只限定了 $d\phi$ 不能为负, 但对 dw^t 的符号没有特别的限制, 可正可负。

3 各向异性模型的构建

Collins 提出各向异性模型的耗散增量函数可以写成^[4]

$$d\phi = [A^2(d\varepsilon_v^p + \tan\theta_n d\varepsilon_s^p)^2 + (Bd\varepsilon_s^p)^2]^{1/2} \quad (7)$$

式中： A 和 B 为具有应力量纲的函数，是应力变量 p' 、 q 和固结应力 p'_c 的一阶齐次函数，即 $A = a_1 p' + a_2 q + a_3 p'_c$ ， $B = b_1 p' + b_2 q + b_3 p'_c$ ； a_1 、 a_2 、 a_3 、 b_1 、 b_2 、 b_3 为模型参数； θ_n 为当前屈服面中心线的倾角； $A(d\varepsilon_v^p + \tan \theta_n d\varepsilon_s^p)$ 项可看作包含了耦合效应的塑性体积应变引起的耗散； $Bd\varepsilon_s^p$ 项为塑性剪切应变引起的耗散。

从式 (7) 得到耗散应力为

$$\left. \begin{aligned} \pi' &= A^2 (d\varepsilon_v^p + \tan \theta_n d\varepsilon_s^p) / d\phi; \\ \tau &= [A^2 (d\varepsilon_v^p + \tan \theta_n d\varepsilon_s^p) \tan \theta_n + B^2 d\varepsilon_s^p] / d\phi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

联立消去其中的塑性应变增量 $d\varepsilon_v^p$ 和 $d\varepsilon_s^p$ ，得到耗散应力空间屈服轨迹为

$$\frac{\pi'^2}{A^2} + \frac{(\tau - \pi' \tan \theta_n)^2}{B^2} = 1 \quad (9)$$

其屈服轨迹是一个倾斜的变形椭圆如图 2 所示。将式 (8) 变形后可得：

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{B^2 \pi'}{A^2 (\tau - \pi' \tan \theta_n)} - \tan \theta_n \quad (10)$$

即为耗散应力空间的流动法则，塑性应变增量的方向与屈服轨迹正交^[1]。

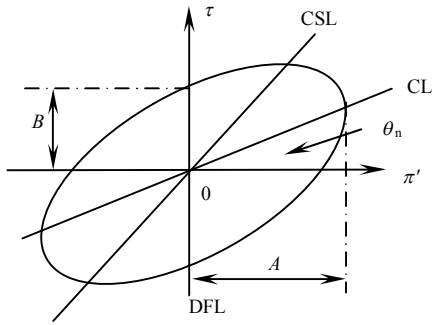


图 2 耗散应力空间的屈服轨迹和特征线

Fig.2 Yield locus and state lines in dissipative stress space

如果耗散应力空间的屈服面是一个水平的椭圆，则等压固结线即为横坐标轴，并满足 $d\varepsilon_s^p = 0$ （这就是各向同性模型）。对于本文中所用的各向异性模型，耗散应力空间的屈服面是一个倾斜的变形椭圆，等压固结线随同屈服面一起旋转，在这条线上仍然满足 $d\varepsilon_s^p = 0$ 。将这条线称为屈服面的中心线，用 CL 表示。将 $d\varepsilon_s^p = 0$ 代入 π' 和 τ 的表达式中可得 $\pi' = \pm A$ ， $\tau = \pm A \tan \theta_n$ ，因此 $\tau/\pi' = \tan \theta_n$ ，这说明 θ_n 是耗散应力空间中 CL 的坡角， $(\pm A, \pm A \tan \theta_n)$ 是 CL 与屈服面的 2 个交点，这两点的法线方向与 π' 轴平行。同样地，在临界状态线

CSL 上 $d\varepsilon_v^p = 0$ ，CSL 与屈服面的 2 个交点处的法线方向与 τ 轴平行。耗散应力空间的屈服轨迹和特征线见图 2。

根据塑性功、塑性耗散和迁移功之间的关系 $dw^p = dw^i + d\phi$ ，并假定迁移应力 ρ' 和 ξ 之间满足 $\xi = \rho' \tan \theta_n$ ，即耗散应力空间的屈服轨迹沿着 CL 迁移到真实应力空间；令 $\gamma = 2a_3$ 且 $\gamma = 1 - a_1 - a_2 \tan \theta_n$ ，可以得出迁移应力 $\rho' = \gamma p'_c / 2$ ， $\xi = \gamma p'_c \tan \theta_n / 2$ ；函数 A 可以写成 $A = (1 - \gamma - a_2 \tan \theta_n) \cdot p' + a_2 q + \gamma p'_c / 2$ ^[4]。

耗散应力表达式为 $\pi' = p' - \rho' = p' - \gamma p'_c / 2$ ， $\tau = q - \xi = q - \gamma p'_c \tan \theta_n / 2$ ，将其代入式 (9) 和式 (10) 中，得真实应力空间的屈服轨迹和流动法则分别为

$$\frac{(p' - \gamma p'_c / 2)^2}{A^2} + \frac{(q - \gamma p'_c \tan \theta_n / 2)^2}{B^2} = 1 \quad (11)$$

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{B^2 (p' - \gamma p'_c / 2)}{A^2 (q - \gamma p'_c \tan \theta_n)} - \tan \theta_n \quad (12)$$

体积硬化规律描述加载过程中屈服面的扩大和缩小。类比修正剑桥模型，用包含了耦合效应的塑性体积应变 $d\varepsilon_v^p + \tan \theta_n d\varepsilon_s^p$ 代替 $d\varepsilon_v^p$ ，得到

$$dp'_c = p'_c (d\varepsilon_v^p + \tan \theta_n d\varepsilon_s^p) / (\lambda - \kappa) \quad (13)$$

其中 λ 和 κ 分别表示 $\varepsilon_v - \ln p'$ 平面上压缩和回弹线的斜率。

根据真实应力空间中土体压缩和挤长破坏线的斜率和相应的公式推导可以得到^[4]，函数 $B = (1 - \alpha) \bar{M} p' + \Delta M q + \alpha \gamma \bar{M} p'_c / 2$ 。若屈服轨迹关于 CL 对称，则有 $b_1 + 2b_3 / \gamma = M_0 \equiv \tan \theta_0$ ， $b_2 = 0$ ，其中 θ_0 为各向同性模型族的破坏线（临界状态线）的坡角，则 $B = (1 - \alpha) M_0 p' + \alpha \gamma M_0 p'_c / 2$ ， $\tan \theta_{DFL} = \tan \theta_n \pm M_0$ 。

4 用各向异性模型模拟密砂的变形

前述各向异性模型模拟计算三轴试验时控制性方程包括微分屈服面得到的一致性条件、流动法则、体积硬化规律、排水试验中的应力路径或者不排水试验中体积应变为 0，这些条件可以表达为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p'_c} dp'_c + \frac{\partial f}{\partial \eta_n} d\eta_n &= 0; \\ d\varepsilon_v^p &= D d\varepsilon_s^p; \\ dp'_c &= p'_c (d\varepsilon_v^p + \eta_n d\varepsilon_s^p) / (\lambda - \kappa); \\ 3dp &= dq (\text{排水}) \text{ 或 } dp' = -p' d\varepsilon_v^p / \kappa (\text{不排水}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中: } \frac{\partial f}{\partial p'} &= \frac{2P}{A^2} - \frac{2a_1 P^2}{A^3} - \frac{2b_1 Q^2}{B^3} - \frac{2Q \tan \theta_n}{B^2}; \\ \frac{\partial f}{\partial q} &= -2a_2 P^2 / A^3 - 2b_2 Q^2 / B^3 + 2Q / B^2; \\ \frac{\partial f}{\partial p'_c} &= -2a_3 P^2 / A^3 - 2b_3 Q^2 / B^3 - P\gamma / A^2; \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_n} &= \frac{a_2 P p'_c}{A^2} + \frac{a_2 P^2 p'_c}{A^3} + \frac{\alpha a_2 M Q^2 p'_c}{B^3} - \frac{2 p'_c Q}{B^2}; \\ D &= B^2 P / A^2 Q - \eta_n; P = p' - \gamma p'_c / 2; Q = q - p' \tan \theta_n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

除此之外, 还需要用到屈服面的旋转硬化规律, 它用来描述随着塑性应变发展真实应力空间中屈服面的倾斜。Collins 曾经建议屈服面逆时针旋转 (因为土体的受压强度大于受拉强度), 这样获得的三轴试验计算曲线与各向同性模型的计算结果相似, 符合松砂的一般变形规律^[4]。为了模拟密砂的试验结果, 将这种旋转硬化规律加以改进, 令剪切的初始阶段屈服面逆时针旋转 (正转), 其旋转硬化规律为 $d\eta_n = \beta_1 \tan \theta_r [\exp(-\beta_1 \varepsilon_s^p)] d\varepsilon_s^p$, 即

$$\eta_n = \tan \theta_r [1 - \exp(-\beta_1 \varepsilon_s^p)] \quad (16)$$

式中: η_n 为屈服面中心线 (记为 CL) 的倾角斜率。当 η_n 接近于它的极限值 $\tan \theta_r$ (可以设定一个很小的数作为判断标准) 时, 令屈服面开始顺时针旋转 (倒转), 以 $-\tan \theta_r$ 为极限值, 此时其旋转硬化规律为 $d\eta_n = -\beta_2 \tan \theta_r [\exp(-\beta_2 \varepsilon_s^p)] d\varepsilon_s^p$, 即

$$\eta_n = -\tan \theta_r [1 - \exp(-\beta_2 \varepsilon_s^p)] \quad (17)$$

这样屈服面中心线 CL 的倾角斜率最终趋向于 0, 屈服面回到了不倾斜的原始状态。

弹性体积应变根据压缩试验中的回弹曲线确定, $d\varepsilon_v^e = \kappa dp' / p'$; 弹性剪切应变根据三轴剪切的卸荷试验确定, $d\varepsilon_s^e = dq / E_{ur}$, 其中回弹模量表达式 $E_{ur} = k_{ur} p_a (\sigma_3 / p_a)^n$ 。

4.1 三轴试验分析

对于排水试验整理方程组 (14) 可以得到:

$$dp' = \frac{\frac{\partial f}{\partial p'_c} \frac{p'_c}{\lambda - \kappa} (D + \eta_n) d\varepsilon_s^p + \frac{\partial f}{\partial \eta_n} d\eta_n}{-(\frac{\partial f}{\partial p'} + 3 \frac{\partial f}{\partial q})} = \frac{T_1 + T_2}{T_3} \quad (18)$$

式中: $T_1 = \frac{\partial f}{\partial p'_c} \frac{p'_c}{\lambda - \kappa} [\frac{B^2 (p' - \gamma p'_c / 2)}{A^2 Q}] d\varepsilon_s^p$; $T_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta_n} d\eta_n$;
 $d\eta_n$; $T_3 = -(\partial f / \partial p' + 3 \partial f / \partial q)$ 。

试样受剪切的初期 (图 3(a), 应力路径以 1: 3 的斜率在 $q-p'$ 平面上上升, $dp' > 0$; 当应力路径达

到最高点时, $dp' = 0$ 。通过计算可以获知, 在应力最高点附近 T_1 项远大于 T_2 项, 一般其差别可以达到 3 个数量级, 因此, 可以忽略 T_2 项。这样 $dp' = 0$ 可以转化为 $T_1 = 0$, 由于 $d\varepsilon_s^p$ 、 p'_c 、 $\partial f / \partial p'_c$ 和 B 都不为 0, 则有 $p' = \gamma p'_c / 2$ 。根据 γ 的几何意义, $\gamma p'_c / 2$ 代表了破坏线 DFL 与屈服面交点处的体积应力, 这说明应力点此时正好 (近似, 因为忽略了 T_2 项) 位于 DFL 上 (图 3(b))。

此后, 屈服面由逆时针旋转变为顺时针旋转, 由 $\eta = q / p'$ 和 $3dp' = dq$ 可得 $d\eta = dq / p' - \eta dp' / p' = (3 - \eta) dp' / p'$ 。在 DFL 线附近, η 较大, p' 较大, 而 dp' 较小, 因而 $d\eta$ 也较小。再考虑 $d\eta_n = -\beta_2 \tan \theta_r [\exp(-\beta_2 \varepsilon_s^p)] d\varepsilon_s^p$, 在 DFL 附近 ε_s^p 较大, 因而 $d\eta_n$ 较小。为简化分析, 可以近似认为 $d\eta_n \approx d\eta$, 也就是说应力点在 DFL 上, 并且和 DFL 同步旋转。

由于屈服面从 $\eta_n = 0$ 的位置开始旋转, 并且正转和倒转的极限角度是相同的, 因此屈服面中心线 CL 的倾角最终趋向于 0。从 $\tan \theta_{DFL} = \tan \theta_n \pm M$ (适用于受压与受拉破坏线关于屈服面中心线 CL 对称的情况) 中可以看出, DFL 的倾角最终趋向于临界状态应力比 M , 于是最终应力点也位于临界状态线上 (图 3(c))。此时 $\eta_n = 0$, $p' = \gamma p'_c / 2$, 则 $D = 0$, 进而可以得到 $d\varepsilon_v^p = 0$, 这说明最终状态时体积保持常数, 不再变化。

归纳起来, 屈服面从中心线 CL 的倾角 $\eta_n = 0$ (各向同性状态) 开始, 先逆时针旋转, 当 η_n 接近 $\tan \theta_r$ 时变为顺时针旋转, 最终回到 $\eta_n = 0$, 但在旋转过程中屈服面始终在增大。破坏线 DFL 的斜率从试样的临界状态应力比 M 开始增大, 达到最大值 $\tan \theta_r + M$ 后开始减小, 最终回到 $\tan \theta_{DFL} = M$ 。应力点从体积应力轴上的一点出发 (根据固结围压确定), 随着屈服面的增大和旋转, 应力比不断增加, 直到应力点到达 DFL, 此后随同 DFL 一起旋转, 最终回到临界状态线, 见图 3。

对于不排水试验, 先分析流动法则 $d\varepsilon_v^p = D d\varepsilon_s^p = [B^2 (p' - \gamma p'_c / 2) / (A^2 q) - \eta_n] d\varepsilon_s^p$ 。初始状态时 $\eta_n = 0$, $q = 0$, D 为一个很大的正数; 在随后的加载过程中, q 不断增大, $p' - \gamma p'_c / 2$ 不断减小, η_n 也不断增大, 因此, D 在逐渐减小。到某一个时刻, 满足 $B^2 (p' - \gamma p'_c / 2) / (A^2 q) = \eta_n$, $D = 0$, 这就是胀缩转化点; 此后 D 继续减小, 直至应力点到达破坏线 DFL, $p' = \gamma p'_c / 2$, $D = -\eta_n$ 。

整理方程式 (14), 有 $dp' = -\frac{p'}{\kappa} [\frac{B^2 (p' - \gamma p'_c / 2)}{A^2 q} -$

$\eta_n]d\varepsilon_s^p$ ，可见 p' q 平面上的应力路径变化趋势与剪胀 D 是一致的，当 $D > 0$ 时， $dp' < 0$ ，应力路径向左侧回退； $D = 0$ 对应着应力路径的转折点；当 $D < 0$ 时， $dp' > 0$ ，应力路径向右上升。

屈服面接近其极限值 $\tan \theta_r$ 时开始返回，最终回到没有旋转的初始状态。此时 $\eta_n = 0$ ， $d\eta_n = 0$ ； $p' = \gamma p'_c / 2$ ，因而 $D = 0$ ，这就要求 $d\varepsilon_v^p = 0$ ， $d\varepsilon_s^p \neq 0$ ；同时， $dp' = 0$ ， $dp'_c = 0$ ，于是又有 $dq = 0$ ，这说明最终状态满足三轴排水试验的一般规律。

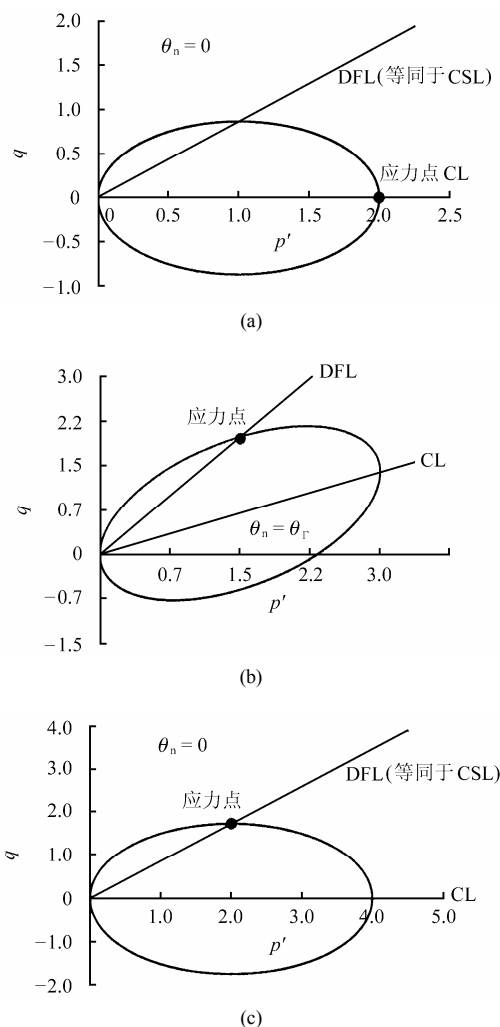


图3 真实应力空间屈服面的旋转过程示意图
Fig.3 Illustration of yield locus rotation in true stress space

4.2 模型参数分析

本文模型涉及的全部参数包括：

(1) 临界状态应力比 M ，即临界状态线的斜率，它由两种方法确定：一是根据公式 $M = 6 \sin \varphi / (3 - \sin \varphi)$ 计算， φ 是强度包线的角度；若没有 φ 角的数据，则从排水三轴试验的 $q - \varepsilon_s - \varepsilon_v$ 曲线上近似估计。设围压为 σ_3 ， $q - \varepsilon_s$ 线的渐近线对应的

剪应力为 q_{ult} ，则临界状态线的斜率为 $M = q_{ult} / (\sigma_3 + q_{ult} / 3)$ 。

(2) 等压压缩线斜率 λ 和回弹线斜率 κ ，根据等向压缩和回弹试验确定。

(3) 弹性参数 k_{ur} 和 n ，根据三轴剪切的卸荷试验确定。

(4) 与屈服面形状有关的参数，包括 γ 和 α ；与旋转硬化有关的参数，包括 β_1 和 β_2 （决定屈服面旋转速度）、 $\tan \theta_r$ （决定屈服面旋转的最终角度）。在有三轴试验数据的情况下，它们可以通过拟合试验数据确定。

4.3 模拟计算验证密砂特性

由上述分析可知，各向异性模型通过调整旋转硬化规律，能够模拟密砂在三轴试验中的特性。给定几组参数，模拟计算三轴排水和不排水试验，可以直观地验证上述分析的正确性。计算中固结围压取 500 kPa，临界状态应力比 $M = 1.25$ ，模型参数 $\lambda = 0.05$ ， $\kappa = 0.01$ ， $a_2 = 0$ ， $\beta_2 = \beta_1 / 10$ ；弹性参数 $k_{ur} = 350$ kPa， $n = 0.5$ ；其他参数和对应的三轴试验计算结果见表 1。图 4~6 为排水试验曲线。

表1 模型参数和对应的计算结果
Table 1 Model parameters and simulating curves

分组	参数			$\tan \theta_r$	对应的图	
	γ	α	β_1		排水试验	不排水试验
第1组	1	1	1, 20, 50	0.25	4	7
第2组	1.2	0.8	1, 20, 50	0.35	5	8
第3组	0.5	0.2	1, 20, 50	0.35	6	9

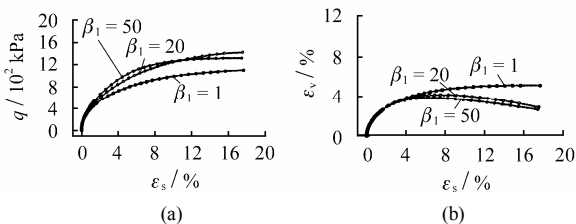


图4 第1组参数下排水剪切试验曲线
Fig.4 Drained behaviour of the model for case 1

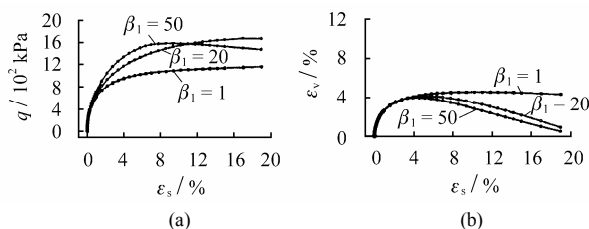


图5 第2组参数下排水剪切试验曲线
Fig.5 Drained behaviour of the model for case 2

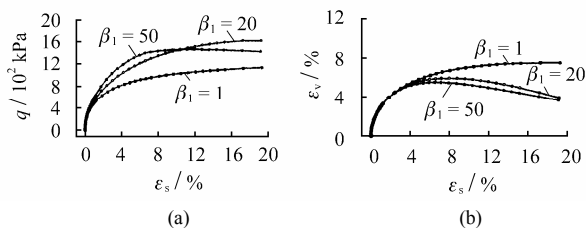


图6 第3组参数下排水剪切试验曲线

Fig.6 Drained behaviour of the model for case 3

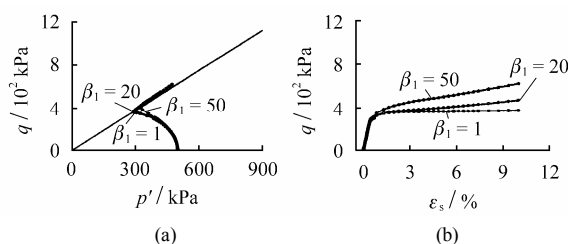


图7 第1组参数下不排水剪切试验曲线

Fig.7 Undrained behaviour of the model for case 1

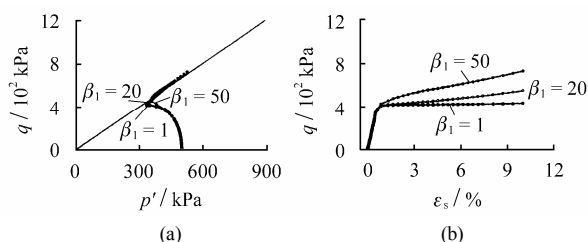


图8 第2组参数下不排水剪切试验曲线

Fig.8 Undrained behaviour of the model for case 2

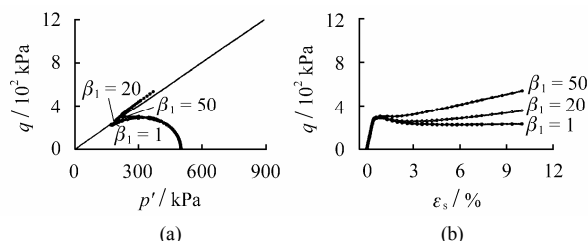


图9 第3组参数下不排水剪切试验曲线

Fig.9 Undrained behaviour of the model for case 3

从以上图形中可以看出:

(1) 对于三轴排水试验, 各向异性模型可以计算剪切应力硬化、软化和剪胀现象; 通过选用不同的模型参数, 计算结果能模拟同种变形趋势下较大范围的变形曲线。对于较小的参数 β_1 , 屈服面旋转较慢, 计算结果有倾向于松砂变形的趋势, 剪胀比较轻微, 软化现象出现较晚或者不明显; 对于较大的 β_1 , 则表现出密砂的典型特征。对于较大的旋转极限 $\tan \theta_r$, 剪胀和软化显著; 较小的 $\tan \theta_r$ 则正相反。

(2) 注意到排水试验中应力的软化和体积应变的胀缩转化是不同步的, 胀缩转化现象先于软化

发生, 这符合试验中观测到的一般现象。胀缩转化点对应的应力水平大约在 70%~85% 之间。

(3) 对于三轴不排水试验, 可以模拟应力路径从固结应力点趋向于临界状态线, 然后以接近临界状态线斜率上升的一般规律。根据屈服面参数 α 取值的不同, 应力路径有两种不同的类型: 当 $\alpha \geq 1$ 时, 应力路径在整个变形过程中始终上升; 当 $\alpha < 1$ 时, 由于屈服轨迹在临界状态线之前存在下降段, 应力路径在转折之前也会出现一段下降, 然后继续上升。

(4) 应力点的最终状态趋向于临界状态线, 体积应力、剪切应力和体积应变的增量趋于 0, 只存在剪应变。参数 β_2 影响这种趋近的速度, β_2 较小时变化趋势明显。

(5) 三轴试验计算曲线体现了密砂在排水和不排水条件下的变形特性。

5 结 论

本文从热力学基本原理构建本构模型出发, 讨论了三轴应力空间中密砂的变形特性。各向异性模型配合旋转的硬化规律, 能够充分模拟密砂的试验曲线。通过分析和计算, 得出如下主要结论:

(1) 以耗散函数为基础构建的各向异性模型, 能够描述非关联流动和旋转硬化。在构造模型的过程中, 区分塑性功和塑性耗散, 认为塑性功只有部分被耗散, 其余的被存储, 并在反向加载时可以恢复。

(2) 分析控制方程, 定性说明并用计算结果验证: 各向异性模型能够模拟密砂的变形特性, 包括应变硬化和软化、体积剪胀和剪缩以及不同形式的不排水应力路径。通过选用不同的模型参数可以获得同种趋势下大范围的变形曲线。

(3) 本文的模型既考虑了密砂的复杂试验曲线特征, 又由模型的热力学基础保证了屈服面和剪胀函数的协调。用多组模型参数, 计算了一系列三轴试验, 包括排水和不排水的剪切, 结果显示, 这种方法能够描述大范围的典型密砂变形规律曲线, 而且使用起来非常简单。

参 考 文 献

- [1] Ziegler H, Wehrli C. The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1987, 25(3): 183—238.

-
- [2] Reddy B D, Martin J B. Internal variable formulations of problems in elastoplasticity: constitutive and algorithmic aspects[J]. **Applied Mechanics Reviews**, 1994, 47(5): 429—456.
- [3] Collins I F, Housby G T. Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials[C]. **Proceedings of the Royal Society of London A**. London: the Royal Society, 1997, 453: 1 975—2 001.
- [4] Collins I F, Kelly P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models[J]. **Geotechnique**, 2002, 52(7): 507—518.
- [5] Collins I F, Hilder T. A theoretical framework for constructing elastic/plastic constitutive models of triaxial tests[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2002, 26(11): 1 313—1 347.
- [6] Collins I F, Muhunthan B. On the relationship between stress-dilatancy, anisotropy, and plastic dissipation for granular materials[J]. **Geotechnique**, 2003, 53(7): 611—618.
- [7] Germain P, Nguyen Q S, Suquet P. Continuum thermodynamics[J]. **Transactions on American Society of Mechanical Engineerings Journal of Applied Mechanics**, 1983, 105: 1 010—1 020.